Ottimizzazione delle reti combinatorie

Ottimizzazione delle reti combinatorie

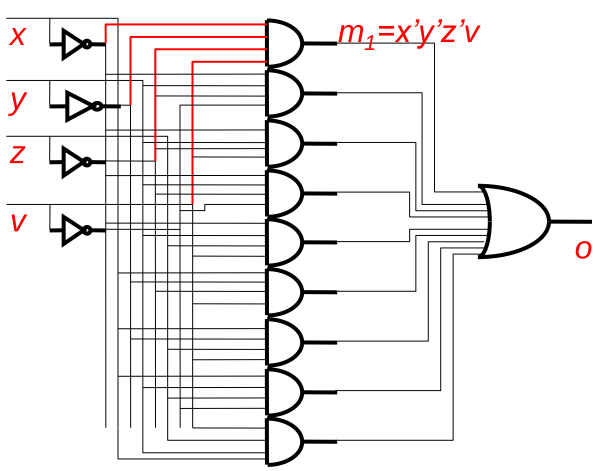
- L’ottimizzazione di un circuito comporta normalmente un compromesso tra:
  - Prestazioni (ritardo di propagazione)
  - Area (o costo)
  - Potenza dissipata
  - Testabilità
  - …

Relazione tra Area e ritardo

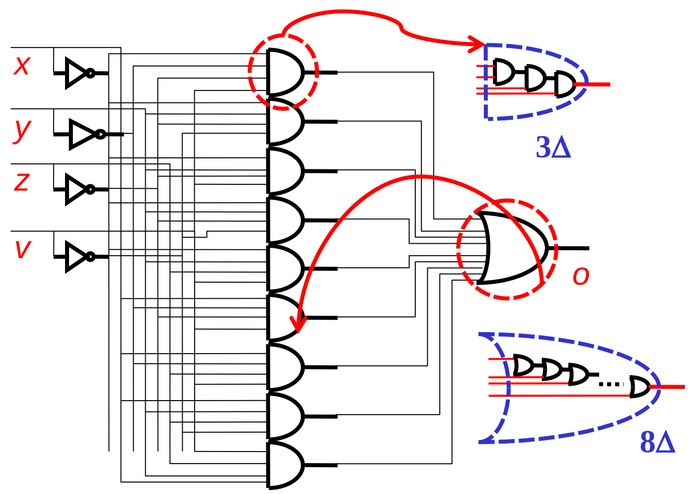
- Per le realizzazioni a due livelli (somma di prodotti o prodotti di somme) è chiara
- Esempio:
  o = $f(x,y,z,v)$ = $\{m_1, m_4, m_5, m_6, m_7, m_9, m_{11}, m_{14}, m_{15}\}$

  x'y'z'v x'yz'v' x'yz'v x'yzv' …

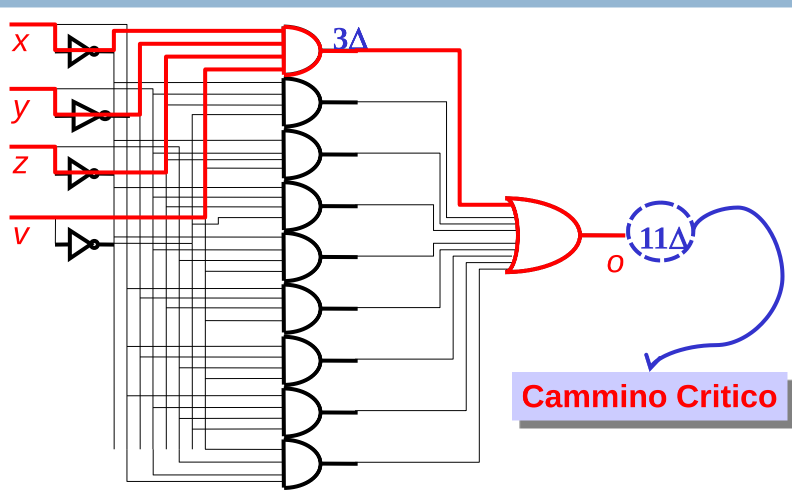
Relazione tra Area e ritardo



Relazione tra Area e ritardo



Relazione tra Area e ritardo



Relazione tra Area e Ritardo
Ottimizzazione dell'Area

Si considerino i mintermini:

$m_4 = x'yz'v'$

$m_5 = x'yz'v$

-Due prodotti (2 porte AND a 4 ingressi)

Però possiamo:

$$x'yz'v' + x'yz'v = x'yz'(v' + v) = x'yz'$$

Un prodotto (1 porta AND a 3 ingressi)

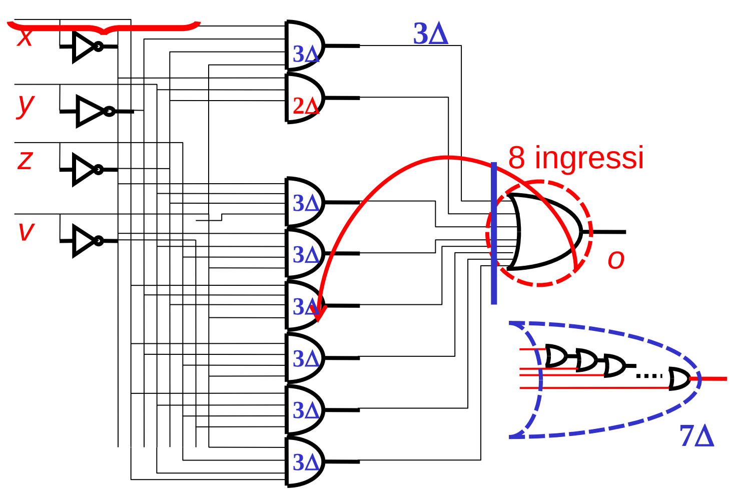
-Ottimizzazione in area (1 porta in meno)

-Nessuna ottimizzazione in ritardo per il primo livello (i restanti mintermini contengono tutti i letterali)

Inoltre la porta OR diventa a 8 ingressi

-Ottimizzazione in ritardo nel secondo livello (7Δ)

Relazione tra Area e Ritardo
Ottimizzazione dell'Area



Riepilogando

In un circuito a due livelli (somma di prodotti)

- La riduzione del numero di prodotti riduce sia l'area che il ritardo
- Eliminazione di un letterale
  - Riduce il numero di ingressi nella porta AND (riduzione di area)
  - Riduce il ritardo di un solo segnale che arriva agli ingressi della OR ma non è detto che riduca il ritardo del cammino critico

Minimizzazione di una funzione booleana mediante il metodo di Karnaugh

Espressioni booleane minime

Obiettivo:

trovare una espressione in forma SP o PS minima rispetto a certi criteri di costo.

Nella ottimizzazione delle espressioni SP (PS) a due livelli l'obiettivo è:

- ridurre il numero di minterm (maxterm);
- ridurre il numero di letterali.

Es. f(a,d,c)=a'b'c'+a'bc'+a'b'c equivale a f(a,d,c)=a'b'+a'c'

Metodologie di minimizzazione:

Karnaugh e Quine -Mc Cluskey;

Minimizzazione: Metodo di Karnaugh

- Si propone di identificare forme minime a due livelli applicando l
  - -per SP la riduzione aZ+a'Z=(a+a')Z=Z con Z termine prodotto (implicante) di n-1 variabili;
  - - per PS la riduzione (a'+Z)(a+Z)=Z con Z termine somma (implicato) di n-1 variabili

Esempio: abc'+abc=ab

- La riduzione può essere applicata iterativamente

Esempio: abc'd'+abc'd+abcd'+abcd=

abc'(d'+d)+abc(d'+d) =

abc'+abc = ab(c'+c)=ab

Le trasformazioni utilizzate non alterano il numero dei livelli.

Minimizzazione

La formula di riduzione potrebbe essere facilmente applicata direttamente alle espressioni Booleane.

Il problema consiste nell'identificare:
- sia tutti i termini su cui applicare la riduzione;
- sia i tutti termini che partecipano a più riduzioni contemporaneamente e replicarli.

SOP: $f(a,b)=a'b+ab+ab' = (a'+a)b+ab' = b+ab'$
$= a'b+a(b+b') = a'b+a$

Nessuna delle due espressioni è minima.

L'espressione minima è $a+b$ ottenuta come
$a'b+ab+ab' = a'b+ab+ab+ab' = (a+a')b+a(b+b') = b+a$

Mappe di Karnaugh

- Il metodo delle mappe di Karnaugh consente di risolvere direttamente i problemi identificati.
  - sia dovuti alla replicazione dei termini.
  - sia legati alla identificazione dei termini da raggruppare.

- Il metodo delle mappe di Karnaugh è grafico.
  - La sua applicazione è semplice per un numero di variabili fino a 4.
  - Risulta complesso per un numero di variabili da 5 a 6.
  - É praticamente inattuabile per un numero di variabili superiori a 6.

Mappe di Karnaugh

Caratteristiche delle mappe

a \ b	0	1
0	0	1
1	1	0

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	0	1

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	0	1
11	0	1	0	0
10	1	1	0	0

Gli indici delle colonne e delle righe in posizione adiacente differiscono solo di un bit

La prima e l'ultima colonna (riga) devono essere considerate adiacenti

Per le forme SP ogni casella in cui è presente un 1 corrisponde ad un mintermine.

Costruzione delle mappe di Karnaugh

•Fino a 4 variabili si costruisce un'unica tabella.

•Si dividono le variabili in due gruppi che costituiranno gli indici delle righe e delle colonne.

c \ ab	00	01	11	10
0	000^{0}	010^{2}	110^{6}	100^{4}
1	001^{1}	011^{3}	111^{7}	101^{5}

cd \ ab	00	01	11	10
00	0000^{0}	0100^{4}	1100^{12}	1000^{8}
01	0001^{1}	0101^{5}	1101^{13}	1001^{9}
11	0011^{3}	0111^{7}	1111^{15}	1011^{11}
10	0010^{2}	0110^{6}	1110^{14}	1010^{10}

Costruzione delle mappe di Karnaugh

•Se la funzione booleana è rappresentata come SP, vengono riempite con un '1' le celle in corrispondenza delle configurazioni per le quali la f ha un 1;

•Le configurazioni in corrispondenza a condizioni di indifferenza vengono riempite con un '-';

•Le altre celle vengono riempite con uno '0'

$f(a,b,c)=\Sigma(0,1,4)+d_{\Sigma}(5)$

c \ ab	00	01	11	10
0	1 ^{0}	0 ^{2}	0 ^{6}	1 ^{4}
1	1 ^{1}	0 ^{3}	0 ^{7}	- ^{5}

$f(a,b,c,d)=\Sigma(0,1,2,5,6,9)+d_{\Sigma}(4,7,8)$

cd \ ab	00	01	11	10
00	1 ^{0}	- ^{4}	0 ^{12}	- ^{8}
01	1 ^{1}	1 ^{5}	0 ^{13}	1 ^{9}
11	0 ^{3}	- ^{7}	0 ^{15}	0 ^{11}
10	1 ^{2}	1 ^{6}	0 ^{14}	0 ^{10}

Costruzione delle mappe di Karnaugh

•Se la funzione booleana è rappresentata come PS, vengono riempite con un '0' le celle in corrispondenza delle configurazioni in corrispondenza delle quali la f ha un 0;

•Le configurazioni in corrispondenza a condizioni di indifferenza vengono riempite con un '-';

•Le altre celle vengono riempite con uno '1'

$f(a,b,c)=\Pi(0,1,4)+d_{\Pi}(5)$

c \ ab	00	01	11	10
0	0 ^{0}	1 ^{2}	1 ^{6}	0 ^{4}
1	0 ^{1}	1 ^{3}	1 ^{7}	- ^{5}

$f(a,b,c,d)= \Pi(0,1,2,5,6,9)+d_{\Pi}(4,7,8)$

cd \ ab	00	01	11	10
00	0 ^{0}	- ^{4}	1 ^{12}	- ^{8}
01	0 ^{1}	0 ^{5}	1 ^{13}	0 ^{9}
11	1 ^{3}	- ^{7}	1 ^{15}	1 ^{11}
10	0 ^{2}	0 ^{6}	1 ^{14}	1 ^{10}

Mappe di Karnaugh

a’b’cd+a’b’cd’+a’bcd+ a’bcd’=

a’c(b’d+b’d’+bd+bd’)=

a’c(b’(d+d’)+b(d+d’))=

a’c(b’+b)=a’c

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

abc’d’+ abc’d=

abc’(d+d’)=abc’

I mintermini di 4 variabili abc’d’ e abc’d, posti in posizione adiacente nella mappa nell’espressione SP, possono essere sostituiti dal prodotto abc’ di 4-1=3 variabili che corrisponde nella mappa ad un cubo di 2^1=2 caselle.

I mintermini di 4 variabili a’b’cd, a’b’cd’, a’bcd, a’bcd’, posti tutti in posizione adiacente, possono essere sostituiti nell’espressione SP dal prodotto a’c di 4-2=2 variabili che corrisponde al cubo di 2^2=4 caselle

Mappe di Karnaugh

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

In una mappa a n variabili ad un cubo di 2^m caselle adiacenti corrisponde un termine prodotto di n-m variabili.

m definisce la dimensione del cubo.

Le m-n variabili che restano sono quelle che nel cubo hanno lo stesso valore in tutte le caselle.

Una funzione f può essere rappresentata da una espressione SP nella quale i prodotti corrispondono ai cubi necessari per coprire tutte le caselle in cui è presente il valore 1.

Mappe di Karnaugh

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	1	1	0	0

La minimizzazione è ottenuta individuando il minimo numero di cubi e, a parità di numero, quelli col la massima dimensione garantendo la copertura di tutti gli 1.

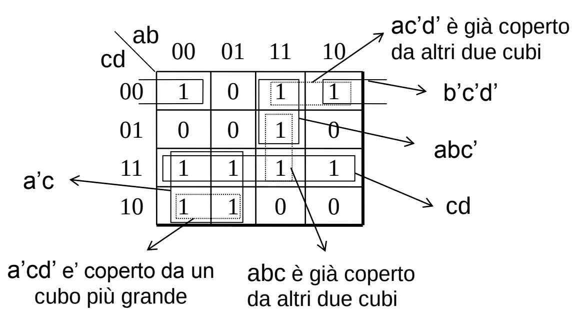
Per ottenere un'espressione minima:

–non si deve scegliere un cubo le cui caselle sono coperte da un cubo di dimensione maggiore;

–se esistono più modi di coprire gli 1, bisogna scegliere la copertura con i cubi di massima dimensione;

–non si devono scegliere cubi che coprono solo 1 di f già coperti da un insieme di altri cubi già scelti.

Mappe di Karnaugh



Date le coperture

1) b'c'd', abc', cd, a'cd' 2) b'c'd', abc', a'c, acd

3) b'c'd', abc', a'c, cd

la 3) è quella minima.

f(a,b,c,d)= b'c'd'+abc'+ a'c+cd

Condizioni di indifferenza

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	-	0	1	0
11	1	1	-	-
10	1	0	0	0

Le condizioni di indifferenza possono essere sfruttate per incrementare la dimensione di cubi

Nell'esempio in figura assumendo che alle cond. di indifferenza corrisponda il valore 0 otterremmo la funzione

f=a'b'c'd'+abc'+a'cd+a'b'c

Imponendo il valore 1 in tutte e tre le caselle otterremmo:

f=a'b'+abc'+cd